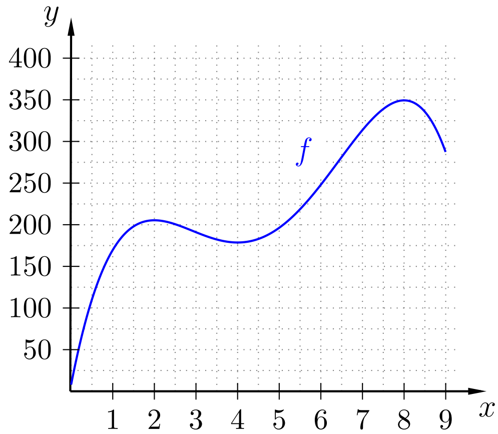
Analysis 2 : Gasgrill

1 Gasgrill - Aufgaben

Da das Grillen im Winter immer beliebter wird, untersucht der Hersteller eines Gasgrills den Temperaturverlauf während eines Grillvorgangs bei einer Umgebungstemperatur von $8°C$.
Zwei Minuten nach Beginn der Messung wird der Deckel für einen gewissen Zeitraum geöffnet, um Grillgut aufzulegen. Die durch den Temperaturfühler im Deckel gewonnenen Messpunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion f mit

$$f(t) = -t^4 + \frac{56}{3}t^3 - 112t^2 + 256t + 8; 0 \leq t \leq 9,$$

Dabei gibt t die Zeit in Minuten und $f(t)$ die Temperatur am Temperaturfühler in $°C$ an.



1. *Funktion f*

   (a) Bestimmen Sie mithilfe der Graphik auf dem *Beiblatt* sowohl die Temperatur als auch die momentane Temperaturänderungsrate sechs Minuten nach Beginn der Messung.

   (4 P)

   (b) Berechnen Sie die maximale Temperatur.

   (6 P)

   (c) Berechnen Sie die durchschnittliche Temperatur über dem Zeitintervall $[0; 9]$.

   (3 P)

   (d) Der Hersteller behauptet, dass die momentane Temperaturänderungsrate zu Beginn des Grillvorgangs $5°C$ pro Sekunde erreicht. Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Behauptung bei dem untersuchten Grillvorgang nicht zutrifft.

   (3 P)

Lösung

Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $Strg$ und Lösung bzw. $Ctrl$ und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. *Funktionenschar*

   Nach 9 Minuten kühlt der ausgeschaltete Grill bei geöffneten Deckel weiter ab. Die bei der Abkühlung gewonnenen Messpunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion $g_{a;b}$ mit

   $$g_{a;b}(t) = a \cdot e^{-b\cdot(t-9)} + 7 \quad ; \quad 9 \leq t \leq 20 \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad b > 0.$$

   Es gilt

   $$g'_{a;b}(t) = -a \cdot b \cdot e^{-b\cdot(t-9)}.$$

   (a) Beweisen Sie, dass die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ an jeder Stelle t fallen.

   (2 P)

   (b) Die Graphen der Funktionen $g''_{a;b}$ verlaufen für alle $a > 0$ und $b > 0$ vollständig oberhalb der t-Achse. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Eigenschaft für die Graphen der Funktion $g_{a;b}$.

   (2 P)

   (c) Auf dem $Beiblatt$ ist der Graph einer Funktion $g_{a;b}$ abgebildet, der knickfrei an den Graphen von f anschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Parameter a und b.

   (5 P)

   Lösung

3. *Funktion g*

   Im Folgenden wird die Funktion g mit

   $$g(t) = g_{280;0.5}(t) = 280 \cdot e^{-0.5\cdot(t-9)} + 7 \quad ; \quad 9 \leq t \leq 20$$

   und die durch die Funktion g beschriebene Abkühlungsphase betrachtet.

   (a) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t, an dem die momentane Temperaturänderungsrate gleich der mittleren Temperaturänderungsrate der Abkühlungsphase ist.

   (4 P)

   (b) Berechnen Sie das zweiminütige Zeitintervall, in dem die Temperatur um genau $100°C$ sinkt.

   (3 P)

   Lösung

4. *Fläche F*

   Der Graph von f, der Graph von g und die t-Achse begrenzen über dem Intervall $[0; 20]$ eine Fläche F.

   (a) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche F.

   $$[Kontrolle : A \approx 2666.91]$$

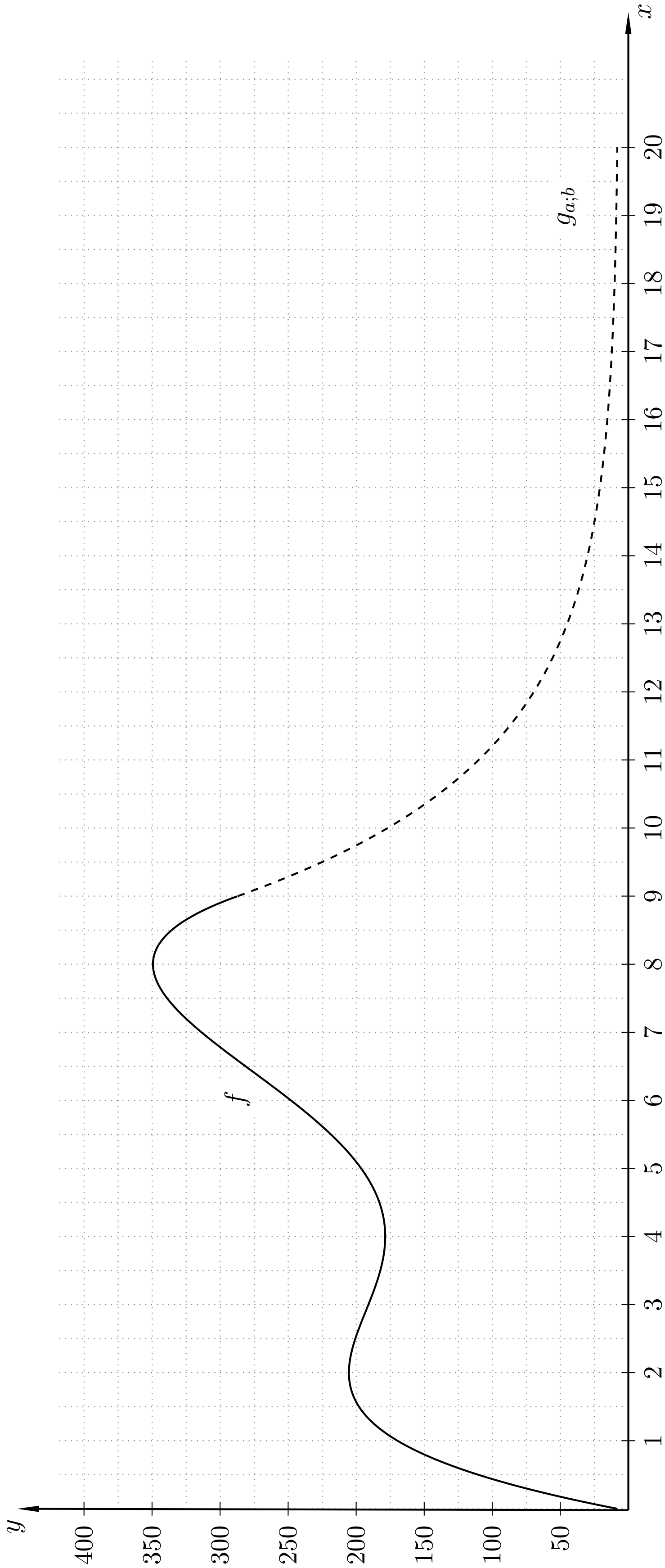
   (3 P)

   (b) Durch den Punkt $M(m|0)$ verläuft eine zur y-Achse parallele Gerade, die die Fläche F in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Ermitteln Sie den Wert m.

   (5 P)

   Lösung

1.1 Beiblatt


x
y
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
50
100
150
200
250
300
350
400
f
$g_{a;b}$